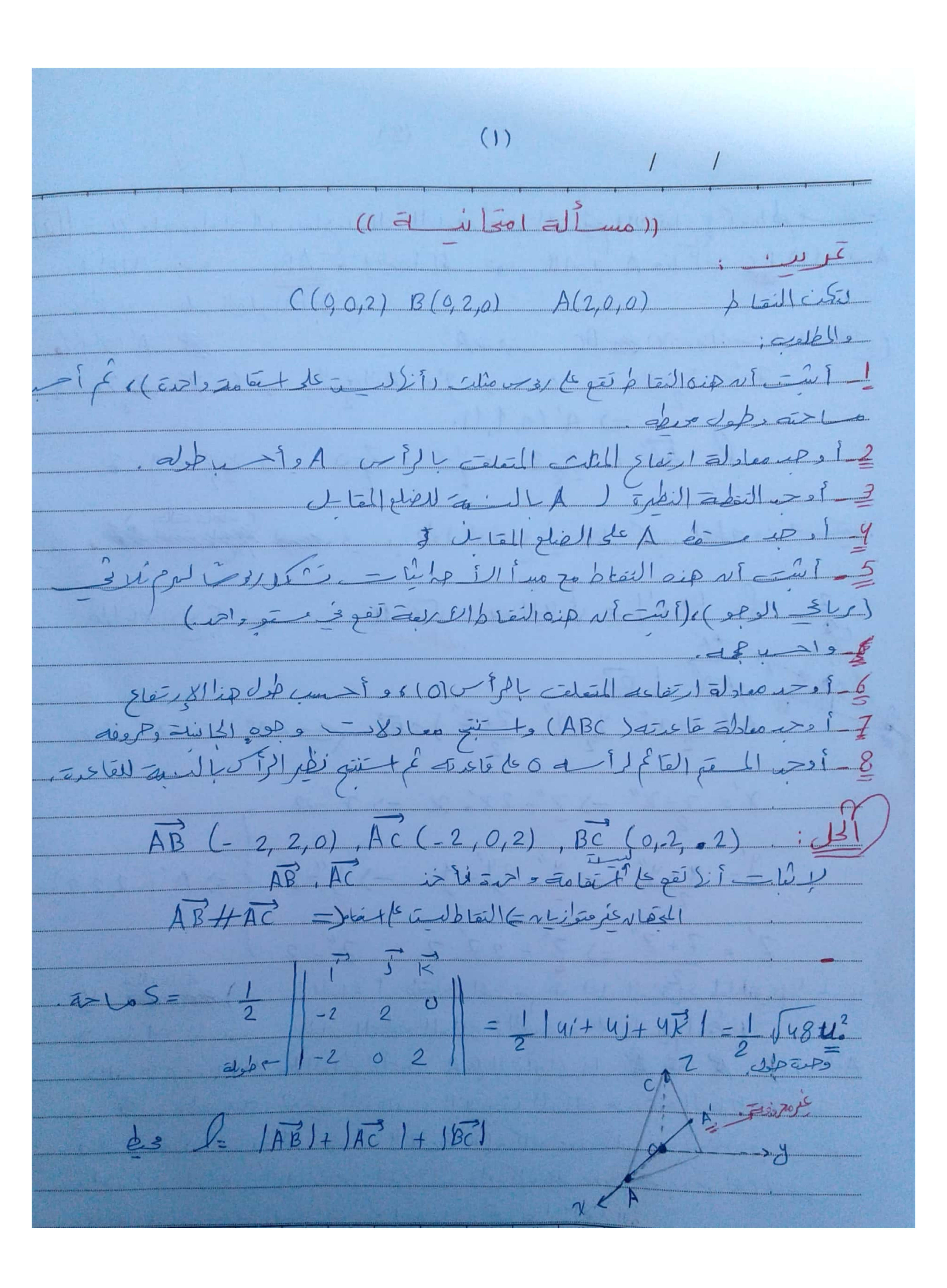


/ /

((مسألة امتحانية))

تمرين:

لتكن النقاط $A(2,0,0)$ $B(0,2,0)$ $C(0,0,2)$

والمطلوب:

1- أثبت أن هذه النقاط تقع على رؤوس مثلث (أي ليست على استقامة واحدة)، ثم أحسب مساحته، طول محيطه.

2- أوجد معادلة ارتفاع المثلث المتعلق بالرأس A وأحسب طوله.

3- أوجد النقطة النظيرة لـ A بالنسبة للضلع المقابل

4- أوجد مسقط A على الضلع المقابل له

5- أثبت أن هذه النقاط مع مبدأ الإحداثيات تشكل رؤوس لهرم ثلاثي (رباعي الوجوه)، (أثبت أن هذه النقاط الأربعة تقع في مستوٍ واحد) واحسب حجمه.

6- أوجد معادلة ارتفاعه المتعلق بالرأس (O)، وأحسب طول هذا الارتفاع

7- أوجد معادلة قاعدته (ABC) واستنتج معادلات وجوهه الجانبية وحروفه

8- أوجد المسقط القائم لرأسه O على قاعدته ثم استنتج نظير الرأس O بالنسبة للقاعدة.

الحل:

$\vec{AB}(-2,2,0)$, $\vec{AC}(-2,0,2)$, $\vec{BC}(0,-2,2)$

لإثبات أن لا تقع على استقامة واحدة فنأخذ $\vec{AB}$, $\vec{AC}$

المتجهان غير متوازيان ⇐ النقاط ليست على استقامة ⇐ $\vec{AB} \nparallel \vec{AC}$

$$S_{\text{مساحة}} = \frac{1}{2}\left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\left|4\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{48}\ u^2$$

وحدة طول

محيط $l = |\vec{AB}| + |\vec{AC}| + |\vec{BC}|$

/ /

2 - لإيجاد معادلة الارتفاع بالحالة العامة نوجد المستقيم d الارتفاع كتقاطع مستويين أولهما المستوي ABC وثانيهما المستوي المار بـ A وناظمه BC (المار بـ A والعمودي على الضلع المقابل)

- $A'(x', y', z')$ منتصف BC (لأنه مثلث متساوي الأضلاع)

$$x' = \frac{x_1 + x_2}{2} = 0 \quad , \quad y' = \frac{y_1 + y_2}{2} = 1 \; , \; z' = \frac{z_1 + z_2}{2} = 1$$

$$\Rightarrow A'(0, 1, 1).$$

$$d = \overrightarrow{AA'} \; : \; \frac{x-2}{-2} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1} \Rightarrow \frac{x-2}{-2} = y = z$$

- (حالة عامة) يجب طول الارتفاع في المثلث كبعد نقطة عن مستقيم.

$$h = |AA'| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{6} \; u$$

طول الارتفاع ؟ ←

u = وحدة طول

3

$\overrightarrow{AA''} \perp \overrightarrow{BC}$

بما أن A' منتصف AA'' ⟸ $A'\left(\frac{x+x''}{2}, \frac{y+y''}{2}, \frac{z+z''}{2}\right) \in \overrightarrow{BC}$

$$x' = \frac{x + x''}{2} \Rightarrow x'' = 2x' - x \Rightarrow x'' = -2$$

$$y' = \frac{y + y''}{2} \Rightarrow y'' = 2y' - y \Rightarrow y'' = 2$$

$$z' = \frac{z + z''}{2} \Rightarrow z'' = 2z' - z \quad z'' = 2$$

$$\Rightarrow A''(-2, 2, 2)$$

4 حالة عامة: (مسقط القائم لنقطة على المستقيم هو الحل المشترك لمعادلتي هذا المستقيم مع معادلة المستوي المار بالنقطة المعطاة والعمودي على المستقيم المعطى)

حالة خاصة: (المسقط القائم لرأس A على الضلع المقابل هو $A'(0,1,1)$

5 حالة عامة: نوجد المتجهات الثلاث المشكلة من هذه النقاط الأربعة ونحسب الجداء المختلط للمتجهات الثلاثة فإن كان معدوماً فالنقاط تقع في مستوٍ واحد أي أنها لا تشكل رؤوس لهرم ثلاثي وإن كان غير معدوم فهي رؤوس لهرم ثلاثي وقيمة هذا الجداء المطلقة هو 6 أضعاف حجم هذا الهرم الثلاثي.

$4\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k} \parallel (1,1,1)$

لیست نقطة.

(3)

/ /

$\vec{OA}\ (2,0,0)$; $\vec{OB}\ (0,2,0)$; $\vec{OC}\ (0,0,2)$. -5

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{\frac{4}{3}\ u^2.}$$

-6

معادلة الارتفاع؟

$$\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$$

$\vec{n}$ الناظم على المستوي (ABC)

$O \in \ell \perp \pi(ABC)$

$O \in \ell \parallel \vec{u}\ (1,1,1)$

$$\ell = \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

طول الارتفاع = بعد نقطة عن مستوي ABC (يمر بنقطة معلومة وله ناظم معلوم)

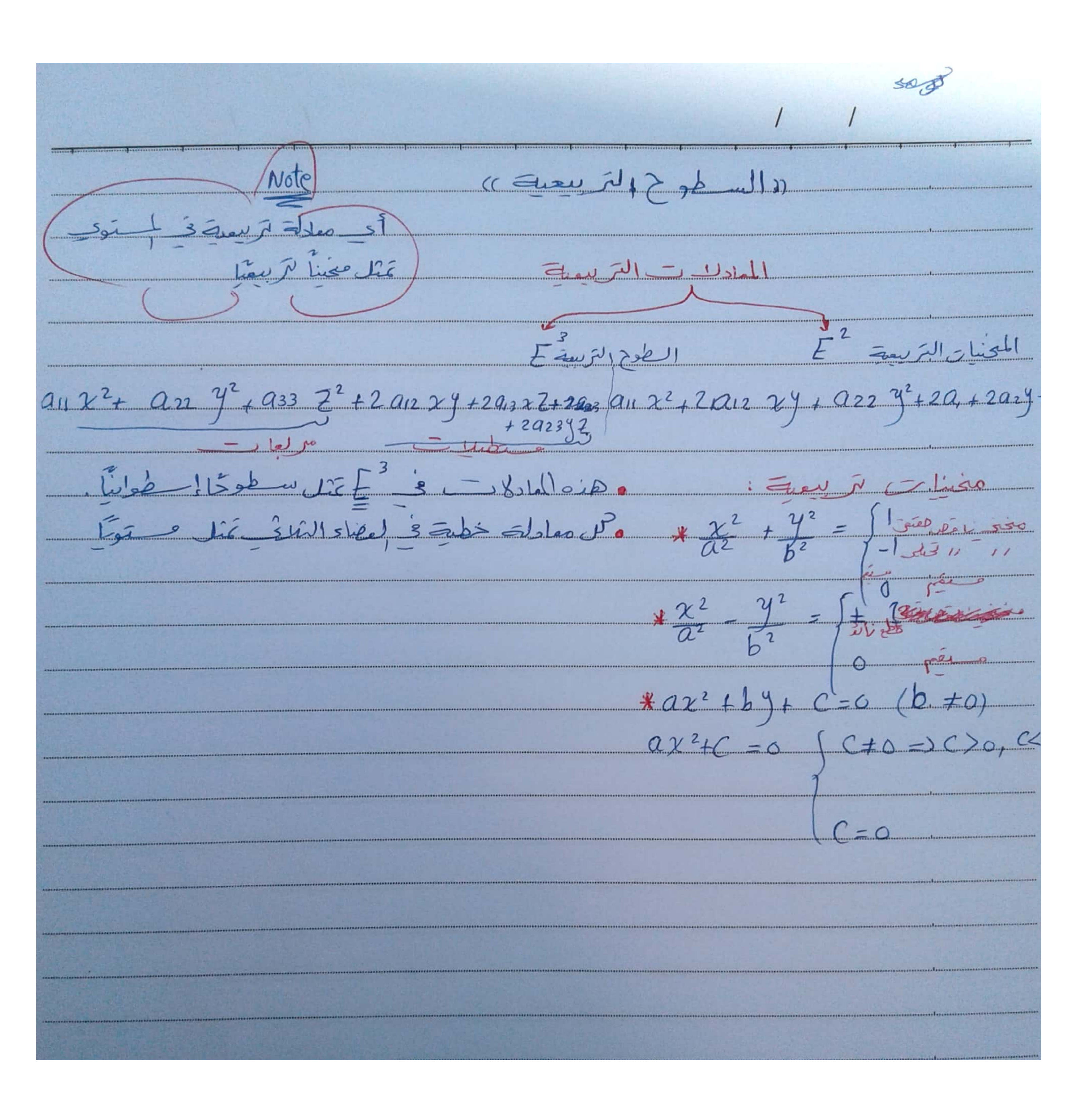
معادلة مستوي

$(x-2) + y + z = 0 \Rightarrow x + y + z - 2 = 0$

قوة كاملة.

طول الارتفاع $h' = -\frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ طول ارتفاع $= \frac{|-\sqrt{2}|}{\sqrt{3}}\ u.$

Scanned by CamScanner



/ /

«السطوح التربيعية»

Note
أي معادلة تربيعية في المستوي تمثل منحنياً تربيعياً

المعادلات التربيعية

- المنحنيات التربيعية E^2:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1 + 2a_2y \ldots$$

- السطوح التربيعية E^3:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

مربعات — مختلطات

• هذه المعادلات في E^3 تمثل سطوحاً اسطوانياً.
• كل معادلة خطية في الفضاء الثلاثي تمثل مستوياً

منحنيات تربيعية:

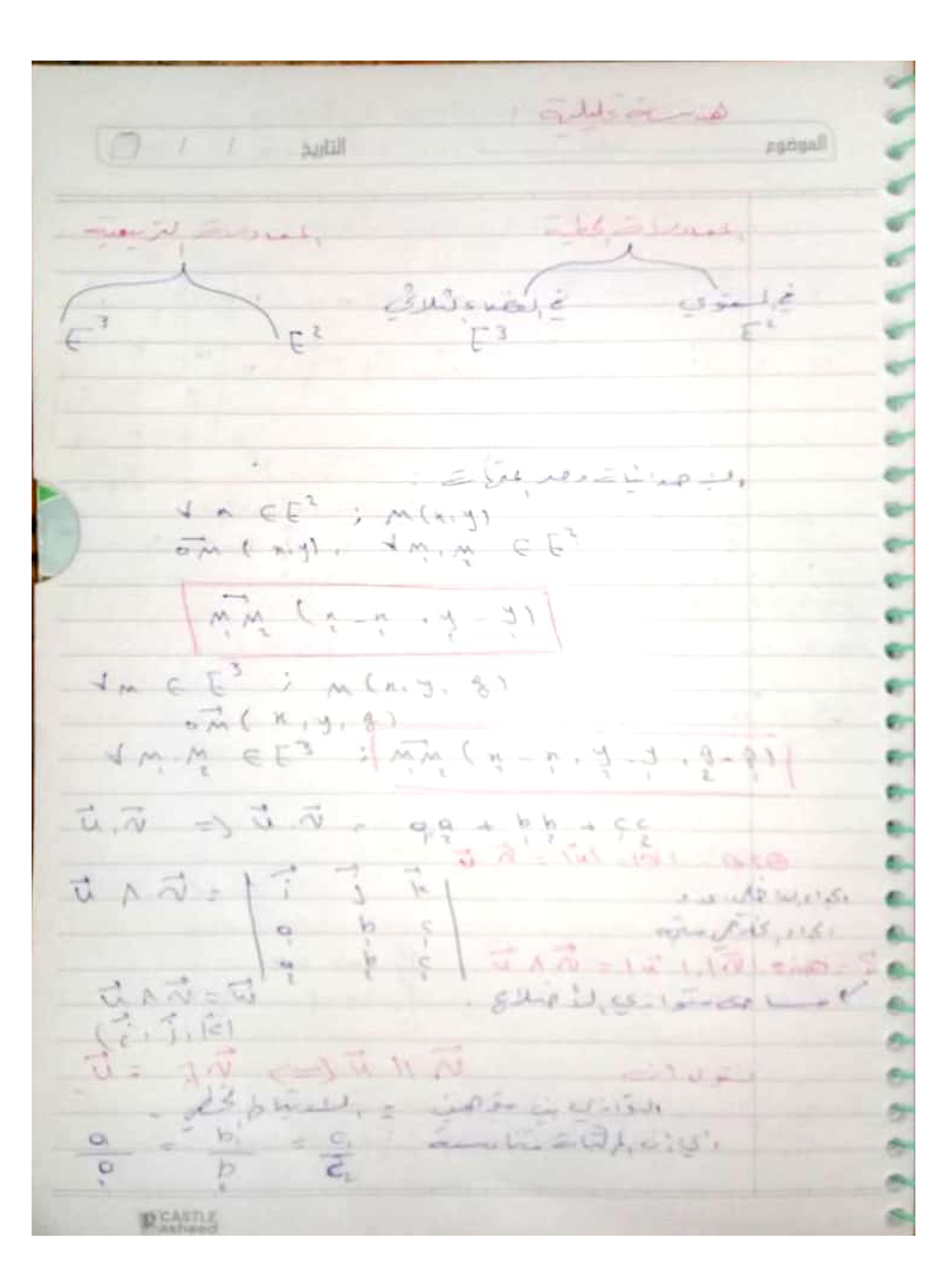
$$* \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \begin{cases} 1 & \text{منحني ناقص حقيقي} \\ -1 & \text{منحني ناقص تخيلي} \\ 0 & \text{مستقيم} \end{cases}$$

$$* \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \begin{cases} \pm 1 & \text{قطع زائد} \\ 0 & \text{مستقيم} \end{cases}$$

$$* \ ax^2 + by + c = 0 \quad (b \neq 0)$$

$$ax^2 + c = 0 \quad \begin{cases} c \neq 0 \Rightarrow c > 0,\ c < \\ c = 0 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner



هندسة تحليلية :

الموضوع　　　　　　　　التاريخ / /

المعلمات الكلية :　　　　　　　　المعلمات التربيعية :

في المستوي E^2 ، في الفضاء الثلاثي E^3　　　　E^2 ، E^3

المركبات معلم :

$\forall M \in E^2 \; ; \; M(x, y)$

$\vec{OM}(x, y) , \; \forall M_1, M_2 \in E^2$

$$\vec{M_1M_2}(x_2 - x_1 , y_2 - y_1)$$

$\forall M \in E^3 \; ; \; M(x, y, z)$

$\vec{OM}(x, y, z)$

$\forall M_1 , M_2 \in E^3 \; ; \; \vec{M_1M_2}(x_2 - x_1 , y_2 - y_1 , z_2 - z_1)$

$\vec{u}, \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin\theta$

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

حساب مساحة متوازي الأضلاع .

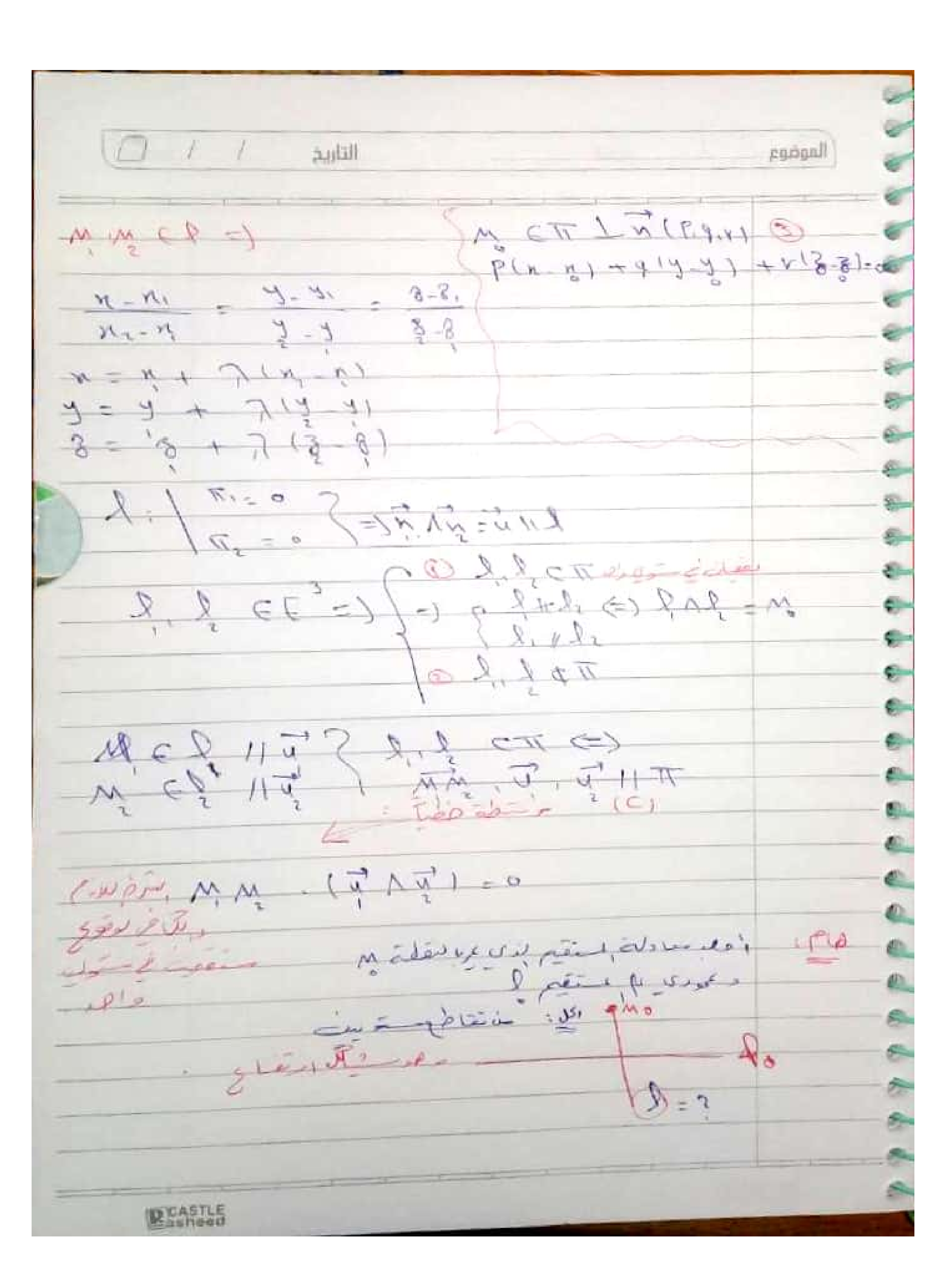
التوازي :

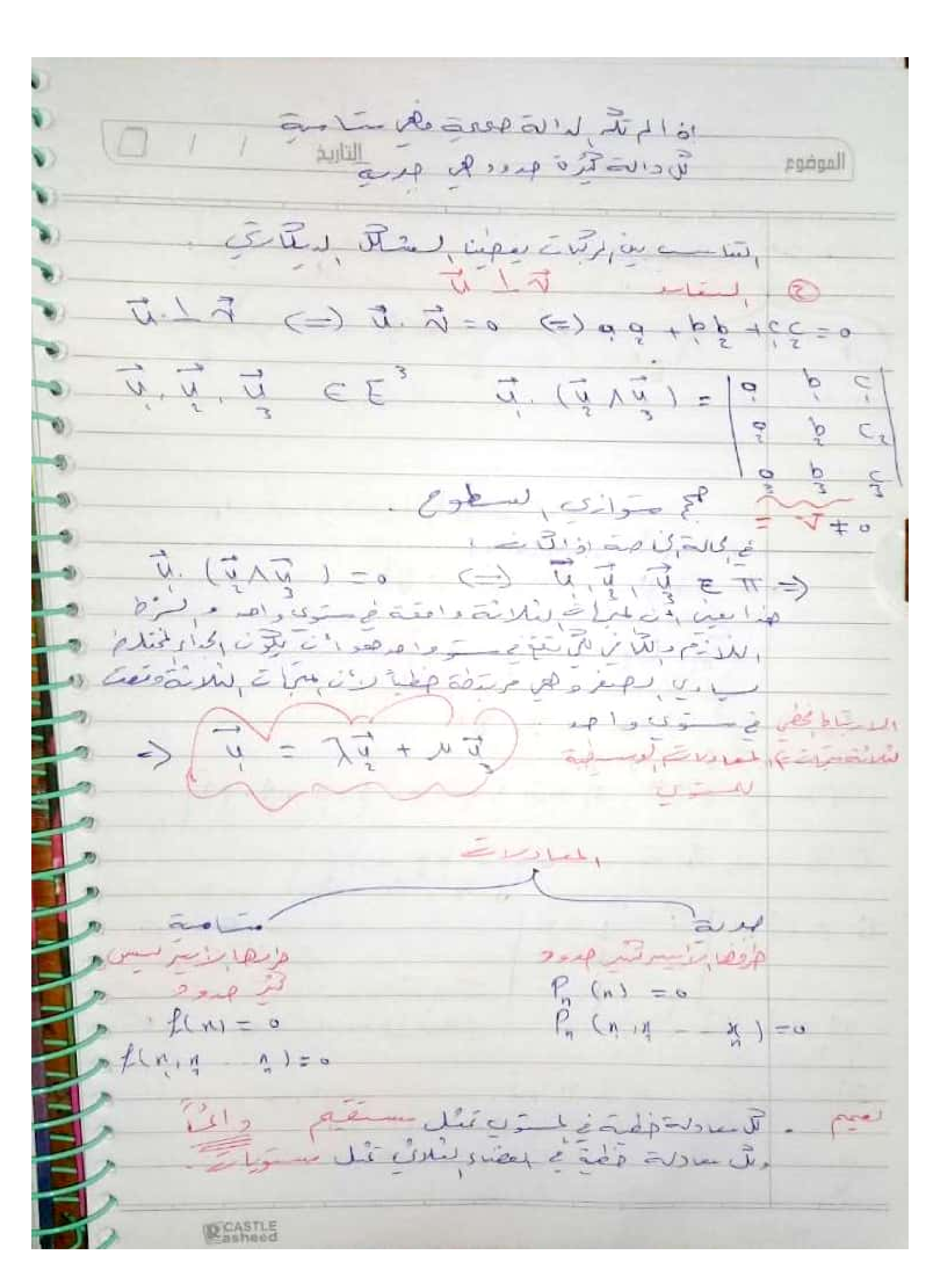
$\vec{u} = \lambda \vec{v} \iff \vec{u} \parallel \vec{v}$

المركبات متناسبة

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

CASTLE Rasheed


الموضوع
التاريخ / /
$M_1, M_2 \in \ell \Rightarrow$
$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$
$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1)$
$y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1)$
$z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1)$
$M_0 \in \pi \perp \vec{n}(p,q,r)$
$p(x - x_0) + q(y - y_0) + r(z - z_0) = 0$
$\ell : \pi_1 = 0, \pi_2 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \vec{u} \parallel \ell$
$\ell_1, \ell_2 \in E^3 \Rightarrow$ ① $\ell_1, \ell_2 \subset \pi$ يقعان في مستوي واحد $\Rightarrow \ell_1 \nparallel \ell_2 \Leftrightarrow \ell_1 \cap \ell_2 = M_0$; $\ell_1 \parallel \ell_2$
② $\ell_1, \ell_2 \not\subset \pi$
$M_1 \in \ell_1 \parallel \vec{u}_1$, $M_2 \in \ell_2 \parallel \vec{u}_2$ $\ell_1, \ell_2 \subset \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{u}_1, \vec{u}_2 \parallel \pi$
مرتبطة خطياً (C)
$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) = 0$
بشرط ان تكون في مستوي واحد
هام
أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بنقطة M_0 عمودي على مستقيم ℓ
الحل: نقطة تقاطع
M_0
ℓ_0
$\ell = ?$



إذا لم تكن الدالة صحيحة فهي متسامية

كل دالة كثيرة حدود هي جبرية

التاريخ / / الموضوع

التناسب بين المركبات يعطينا الشكل الديكارتي .

② التعامد $\vec{u} \perp \vec{v}$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$$

$$\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3} \in E^3 \qquad \vec{v_1}\cdot(\vec{v_2}\wedge\vec{v_3}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = V \neq 0$$

حجم متوازي السطوح .

في حالة ما إذا كانت :

$$\vec{v_1}\cdot(\vec{v_2}\wedge\vec{v_3})=0 \Leftrightarrow \vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}\in\pi \Rightarrow$$

هذا يعني أن المركبات الثلاثة واقعة في مستوى واحد ومن الشرط اللازم والكافي لكي تقع في مستوى واحد هو أن يكون الحجم المحدد بها يساوي الصفر وهي مرتبطة خطيا لأن المركبات الثلاثة تقع في مستوى واحد

$$\Rightarrow \vec{v_1} = \lambda\vec{v_2}+\mu\vec{v_3}$$

الارتباط الخطي للمتجهات ، المعادلات الوسيطية للمستوي

المعادلات

جبرية: طرفها الأيسر كثير حدود

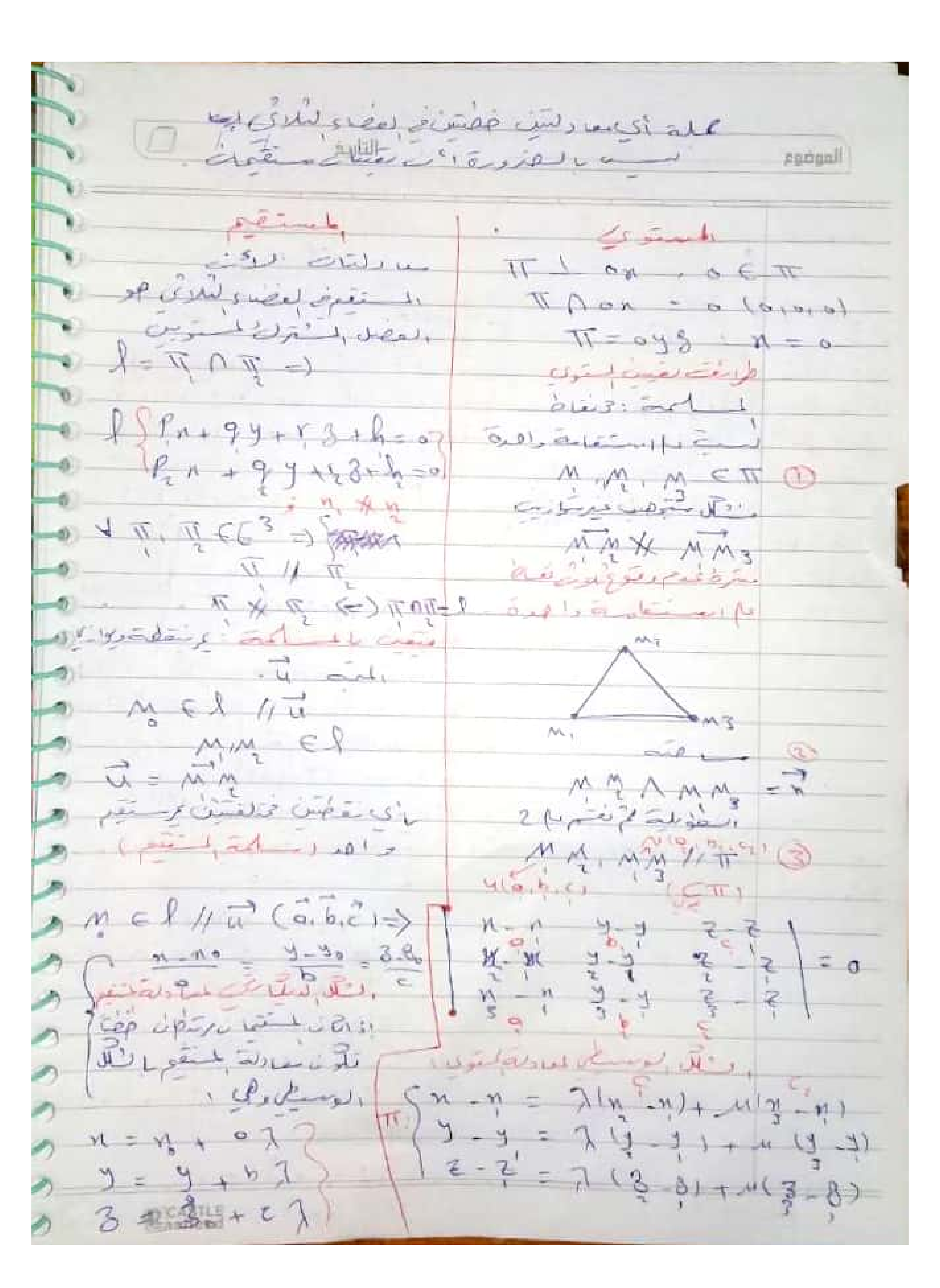
$$P_n(x)=0$$
$$P_n(x_1,x_2 \dots x_n)=0$$

متسامية: طرفها الأيسر ليس كثير حدود

$$f(x)=0$$
$$f(x_1,x_2 \dots x_n)=0$$

تعميم . كل معادلة خطية في المستوي تمثل مستقيم واحد

كل معادلة خطية في الفضاء الثلاثي تمثل مستوي



معادلة أي مستوي والمستقيم في الفضاء الثلاثي
بالنسبة للمحاور، تمثيل مستقيم.

المستوي

$\pi \perp ox \ , \ o \in \pi$

$\pi \cap ox = o(0,0,0)$

$\pi = oyz \ : \ x = 0$

طرق تعيين المستوي

1- ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

(1) $M_1, M_2, M_3 \in \pi$

تشكل مثلث غير متوازي

$\overrightarrow{M_1M_2} \nparallel \overrightarrow{M_1M_3}$

شرط عدم وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة

(2) ... $\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3} = \vec{n}$

الطويلة لا تساوي الصفر

(3) $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3} \parallel \pi$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

الشكل الوسيطي لمعادلة المستوي

$$\pi : \begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1) + \mu(x_3 - x_1) \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y_1) + \mu(y_3 - y_1) \\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z_1) + \mu(z_3 - z_1) \end{cases}$$

المستقيم

معادلات المستقيم في الفضاء الثلاثي هو الفصل المشترك لمستويين

$l = \pi_1 \cap \pi_2 \Rightarrow$

$$l \begin{cases} p_1x + q_1y + r_1z + h_1 = 0 \\ p_2x + q_2y + r_2z + h_2 = 0 \end{cases}$$

$n_1 \nparallel n_2$

$\forall \pi_1, \pi_2 \in E^3 \Rightarrow$ [illegible]

$\pi_1 \parallel \pi_2$

$\pi_1 \nparallel \pi_2 \Leftrightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = l$

تعيين المستقيم بنقطة وشعاع توجيه

$M_0 \in l \parallel \vec{u}$

$M_1 M_2 \in l$

$\vec{u} = \overrightarrow{M_1M_2}$

أي نقطتين مختلفتين من مستقيم واحد (مسألة المستقيم)

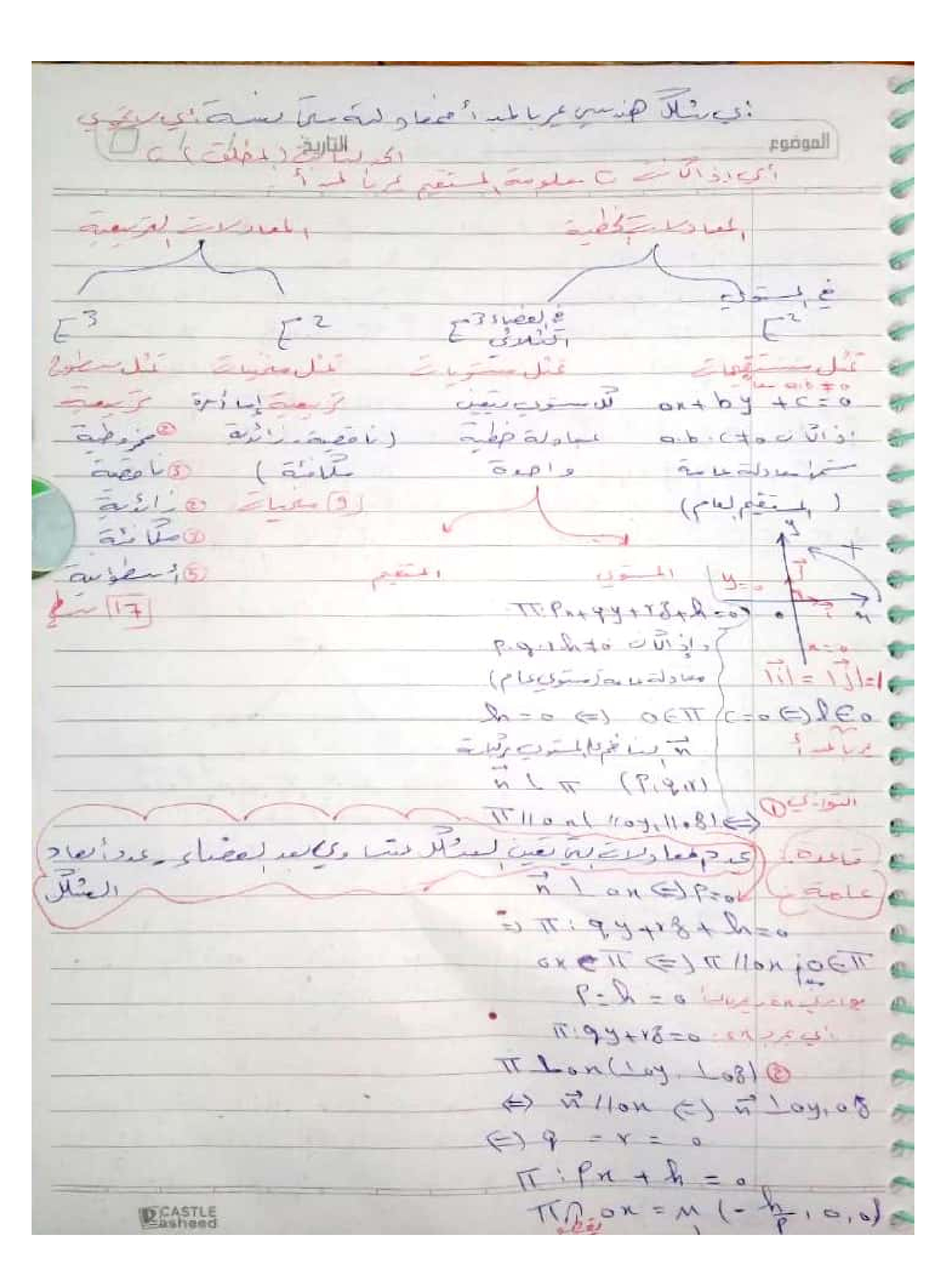
$M_0 \in l \parallel \vec{u}(a, b, c) \Rightarrow$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

الشكل القانوني لمعادلة المستقيم

إذا كانت ... تكون معادلة المستقيم بالشكل الوسيطي:

$$\begin{cases} x = x_0 + a\lambda \\ y = y_0 + b\lambda \\ z = z_0 + c\lambda \end{cases}$$



أي شكل هندسي عربا أحمد ، معادلة معا نسخة تنسى ...

الموضوع — التاريخ

الكاريزما (بدخلها) C

أي إذا كان C مجموعة المستقيم عربا ... ؟

المعادلات الديكارتية — المعادلات الوسيطية

في المستوي E^2 — في الفضاء الثلاثي E^3 — E^2 — E^3

تمثل مستقيمات: $ax + by + c = 0$ ($a, b \neq 0$ معا) إذا كان $a, b, c \neq 0$ تسمى معادلة عامة (المستقيم العام)

تمثل مستويات: لا مستوي معين بمعادلة خطية واحدة

تمثل منحنيات وسيطية إما أخرى (ناقصية ، زائدية ، مكافئة) منحنيات [9]

تمثل سطوح وسيطية: ① كروية ② ناقصية ③ زائدية ④ مكافئة ⑤ أسطوانية — سطح [17]

المستقيم — المستوي

$\pi : px + qy + rz + h = 0$

إذا كان $p, q, r, h \neq 0$ (معادلة عامة لمستوي عام)

$h = 0 \Leftrightarrow O \in \pi$

$c = 0 \Leftrightarrow l \in O$ عربا ...

$\vec{n}$ ناظم المستوي مركباته $\vec{n} \perp \pi$ (p, q, r)

$|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$

$y = 0$ ، $x = 0$

التوازي ① $\pi \parallel ox \parallel (oy, \parallel oz) \Leftrightarrow$

قاعدة: يمكن المعادلات التي تعين المستوي المشابه في الفضاء بعدد أبعاد المشكل

علاقة: $\vec{n} \perp ox \Leftrightarrow p = 0$

$\Rightarrow \pi : qy + rz + h = 0$

$ox \subset \pi \Leftrightarrow \pi \parallel ox$ و $O \in \pi$

$p = h = 0$ ... عربا ...

$\pi : qy + rz = 0$ أي يحوي ...

② $\pi \perp ox (\perp oy, \perp oz)$

$\Leftrightarrow \vec{n} \parallel ox \Leftrightarrow \vec{n} \perp oy, oz$

$\Leftrightarrow q = r = 0$

$\pi : px + h = 0$

$\pi \cap ox = M\left(-\frac{h}{p}, 0, 0\right)$ تقاطع